单元素养测评卷（一）

第五章

时间:120分钟　分值:150分

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 数列$\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{3}{5},-\frac{2}{3},\cdots$的通项公式可能是　(　　)

A. $a_n=(-1)^n\frac{1}{4-n}$　B. $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{4-n}$

C. $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+2}$　D. $a_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+2}$

2. [2023·合肥高二期中] 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1,a_5=5$,则$a_3=$　(　　)

A. 3　B. $\sqrt{5}$　C. $\pm\sqrt{5}$　D. $\frac{5}{2}$

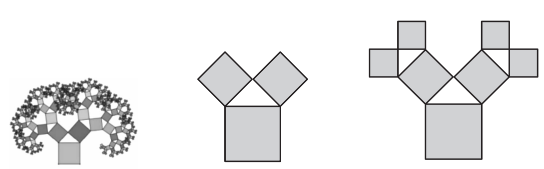
3. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_8=24,a_{16}=8$,则$a_{24}=$　(　　)

A. -24　B. -16　C. -8　D. 0

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1>a_2>0,a_7+a_8=0$,则当S_n取得最大值时,$n=$　(　　)

A. 5　B. 6　C. 7　D. 8

5. [2024·四川眉山高二期末] 图①是美丽的"勾股树",它是以正方形一边为斜边向外作直角三角形,再以该直角三角形的两直角边分别向外作正方形,重复这一过程得到的.图②是第1代"勾股树",图③是第2代"勾股树",已知最大的正方形的面积为1,则第n代"勾股树"中所有正方形的个数与面积的和分别为　(　　)



①　②　③

A. $2^n-1,n$　B. $2^n-1,n+1$

C. $2^{n-1}-1,n$　D. $2^{n+1}-1,n+1$

6. 在数列$\{a_n\}$中,若$\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+\sqrt{2},a_1=8$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为　(　　)

A. $a_n=2(n+1)^2$　B. $a_n=4(n+1)$

C. $a_n=8n^2$　D. $a_n=4n(n+1)$

7. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n,且$S_n=2a_n-1$.若$a_n\in(0,2025)$,则称项a_n为"和谐项".数列$\{a_n\}$中的所有"和谐项"之和为　(　　)

A. 1022　B. 1023

C. 2046　D. 2047

8. 在数列$\{a_n\}$中,$a_n=2n+\frac{k}{n}$,若对任意$n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_n\geqslant a_3$成立,则实数k的取值范围为　(　　)

A. $[12,24]$　B. $(12,24]$

C. $[3,12]$　D. $(3,12]$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 等差数列$\{a_n\}$的公差为d,前n项和为S_n,当首项a_1和d变化时,$a_3+a_8+a_{13}$是一个定值,则下列各数也为定值的有　(　　)

A. a_7　B. a_8　C. S_{15}　D. S_{16}

10. 已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n和T_n,且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+39}{n+3}$,若$\frac{a_n}{b_n}$为整数,则正整数$n$的值可能为(　　)

A. 2　B. 3　C. 4　D. 14

11. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,3a_{n+1}=2a_n+2$,则　(　　)

A. $a_3=\frac{22}{9}$

B. 数列$\{\log_{\frac{3}{2}}(a_n-2)\}$是等差数列

C. $\{a_{2n}\}$的前n项和为$\frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]+2n$

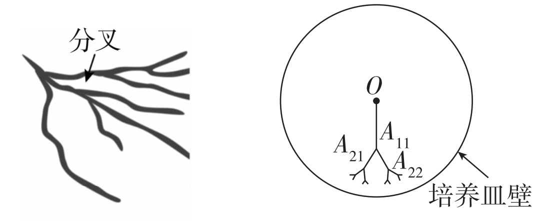
D. 数列$\left\{a_{n+1}+\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$的最小项为4

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 某住宅小区计划植树不少于100棵,若第一天种植2棵,以后每天种植树木的棵数是前一天的2倍,则至少需要的天数为________.

13. 设$a_n=\log_{n+1}(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$,称使乘积$a_1a_2\cdots a_k$为整数的$k(k\in\mathbf{N}_+)$为"理想数",则在$[1,2046]$内的所有"理想数"的和为________.

14. 某生物兴趣小组在显微镜下拍摄到一种黏菌的繁殖轨迹,如图①.通过观察发现,该黏菌繁殖有如下规律:(1)黏菌沿直线繁殖一段距离后,就会以该直线为对称轴分叉(分叉的角度约为60°),再沿直线繁殖;(2)每次分叉后沿直线繁殖的距离约为前一段沿直线繁殖的距离的一半.于是,该组同学将整个繁殖过程抽象为如图②所示的一个数学模型:黏菌从圆形培养皿的中心O开始,沿直线繁殖到A_{11},然后分叉向A_{21}与A_{22}方向继续繁殖,其中$\angle A_{21}A_{11}A_{22}=60°$,且$A_{11}A_{21}$与$A_{11}A_{22}$关于$OA_{11}$所在直线对称,$A_{11}A_{21}=A_{11}A_{22}=\frac{1}{2}OA_{11}$.若$OA_{11}=4$ cm,为保证黏菌在繁殖过程中不会碰到培养皿壁,则培养皿的半径$r(r\in\mathbf{N}^*$,单位:cm)至少为________.



①　②

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分)[2024·山西吕梁高二期中] 在数列$\{a_n\}$中,$a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{n-1}{2^2}+\frac{n}{2}$.

(1)化简$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\{a_{2n}\}$的前n项和S_n.

16. (15分)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_6=-5$，$S_4=-62$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前n项和T_n.

17. (15分)已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=2$，$a_n=3a_{n-1}+2(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=\log_3(a_n+1)$，$c_n=a_nb_n+n$.

(1)证明：$\{a_n+1\}$为等比数列；

(2)求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

18. (17分)已知$\{a_n\}$为等差数列，a_1,a_2,a_3分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且a_1,a_2,a_3中的任意两个数都不在表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行			
第二行	4	6	9
第三行	12	8	7

请从①$a_1=2$，②$a_1=1$，③$a_1=3$这三个条件中选一个填入上表，使满足以上条件的数列$\{a_n\}$存在，并在此存在的数列$\{a_n\}$中，试解答下列问题：

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，若不等式$S_n+\frac{\lambda}{a_n}\geqslant 4$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$\lambda$的最小值.

19. (17分)已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{b_n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若数列$\{a_n\}$为等差数列，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$是公比为2的等比数列，求数列$\left\{\frac{a_n^2}{b_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$.